

3. Lineáris egyenletrendszerek direkt megoldása

Mérnöki feladatok megoldása során gyakran kell nagyméretű lineáris egyenletrendszereket megoldani. Differenciálegyenletek numerikus megoldása is sokszor lineáris egyenletrendszerre vezet. Ebben a fejezetben bemutatjuk az egzakt megoldásokhoz vezető módszereket, alkalmazásuk korlátait.

3.1. A lineáris egyenletrendszer felírási módjai, megoldhatósága

Az n ismeretlent tartalmazó, m egyenletből álló lineáris egyenletrendszer általános alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k + \dots + a_{in}x_n &= b_i \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

ahol az x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) a k -adik ismeretlen, az a_{ik} ($i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$) és a b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) valós számok. Az a_{ik} a k -adik ismeretlen együtthatója az i -edik egyenletben, a b_i pedig az i -edik egyenletben levő konstans tag.

Az egyenletek a következő **tömörebb alakban** írhatók:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Jelöljük az x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) együtthatóiból alkotott vektort $\mathbf{a}_k$ -val, a b_i konstans tagokból alkotott vektort pedig $\mathbf{b}$ -vel, azaz

$$\mathbf{a}_k = (a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk}), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m).$$

Így a lineáris egyenletrendszer **vektoregyenlet alakban**:

$$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \dots + \mathbf{a}_kx_k + \dots + \mathbf{a}_nx_n = \mathbf{b}$$

ahol $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ az m dimenziós tér vektorai.

A mátrixműveletek alkalmazásával a lineáris egyenletrendszer még tömörebb alakba írható. Az ismeretlenek együtthatóit egy $m \times n$ -es mátrix ($\mathbf{A}$) **együtthatómátrix** elemeiként, a konstansokat egy $\mathbf{b}$ -t $m \times 1$ -es oszlopvektorként, az ismeretlenekből alkotott $n \times 1$ -es $\mathbf{x}$ oszlopvektort felírva az egyenletrendszer **mátrixos alakja**:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Homogén az egyenletrendszer, ha $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, **inhomogén**, ha $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

Az n -ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásának nevezünk minden olyan $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ rendezett szám n -est, melynek elemeit rendre a megfelelő ismeretlenek helyébe helyettesítve az egyenletrendszer minden egyenlete teljesül. Ha van ilyen rendezett szám n -es, akkor az egyenletrendszert **megoldhatónak** nevezzük.

Az alábbi kérdésekre keressük a választ:

a) Mi a feltétele annak, hogy az egyenletrendszer megoldható legyen?

b) Ha a rendszer megoldható, akkor hány megoldás van?

c) Hogyan lehet az összes megoldást megadni?

A lineáris egyenletrendszer megoldhatóságát az egyenletrendszer általános, vektoregyenletes és mátrixos alakja alapján különbözőképpen fogalmazzuk meg.

A lineáris egyenletrendszer megoldható

- az általános alak alapján: ha az egyenletei között **nincs ellentmondás**

- a vektoregyenlet alapján : ha a konstans tagokból alkotott **b** vektor **felírható az együtthatóvektorok lineáris kombinációjaként**, vagyis **b** benne van az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok által generált térben.

- a mátrixegyenlet alapján : ha a **b** oszlopvektor benne van az **A** oszlopvektorai által generált térben.

A további kérdésekre a különböző megoldási módok során adunk választ.

▼ 3. 2. Szabályos lineáris egyenletrendszer megoldása inverz mátrix segítségével és Cramer szabállyal

Használt *Maple* parancsok: [LinearAlgebra csomag](#), [Matrix](#), [Determinant](#), [Adjoint](#), [MatrixInverse](#), [simplify](#), [GenerateMatrix](#)

Először röviden foglaljuk össze a lineáris algebra alapfogalmait.

▼ 3. 2. 1. Definíció

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ alakú egyenletrendszer szabályos, ha az **A** négyzetes (kvadratikus) mátrix, valamint determinánsa nem 0. □

▼ 3. 2. 2. Definíció

Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ 2×2-es kvadratikus mátrix **másodrendű determinánsának** nevezzük az $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ kifejezés értékét. □

▼ 3. 2. 3. Definíció

Az $n \times n$ -es kvadratikus mátrix **n-edrendű determinánsának** nevezzük a következő **rekurzív kifejtés** eredményeképpen kapott értéket:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}A_{1,1} + a_{1,2}A_{1,2} + \dots + a_{1,n}A_{1,n} = \sum_{k=1}^n a_{1,k}A_{1,k}$$

ahol $A_{1,k}$ az $a_{1,k}$ elemhez tartozó $(n-1)$ -ed rendű aldetermináns. Ezt az eredeti determinánsból úgy kapjuk, hogy az eredeti determináns első sorát és k -adik oszlopát elhagyjuk, és az így kapott determinánst $(-1)^{k+1}$ -gyel szorozzuk. Ez a determináns első sora szerinti kifejtés. □

▼ 3. 2. 4. Definíció

Ha a $\det \mathbf{A} \neq 0$, a mátrix **reguláris**, ha $\det \mathbf{A} = 0$, a mátrix **szinguláris**. □

▼ 3. 2. 5. Definíció

$$A \text{ az } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{bmatrix} \text{ mátrix adjungáltja } \text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdot & \cdot & A_{n,1} \\ A_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1,n} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{n,n} \end{bmatrix} \text{ ahol}$$

A_{ij} az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsának a_{ij} eleméhez tartozó (előjeles) al-determinánsa. □

▼ 3. 2. 6. Tétel

$(\text{adj } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = (\det \mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}$, ahol $\mathbf{A}$ egy tetszőleges $n \times n$ -es kvadratikus mátrix, $\mathbf{E}$ pedig az $n \times n$ -es egységmátrix. □

▼ 3. 2. 7. Tétel

$(\text{adj } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot (\text{adj } \mathbf{A})$ □

▼ 3. 2. 8. Definíció

A reguláris négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix inverz (nem kell ez: vagy reciprokl) mátrixa az a mátrix, melyre $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ illetve $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$ □

Következmény: $\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}$

Maple-ben a lineáris algebra eljárásait a *LinearAlgebra* csomag tartalmazza

1. Példa Defináljunk tetszőleges, 3×3 -as mátrixot, határozzuk meg determinánsát, adjungáltját és inverzét!

Megoldás

> *with(LinearAlgebra) :*

$A := \text{Matrix}(3, 3, [[a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}], [a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}], [a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}]])$

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

> *Determinant(A)*

$$a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} + a_{2,1} a_{3,2} a_{1,3} - a_{2,1} a_{1,2} a_{3,3} + a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} - a_{3,1} a_{2,2} a_{1,3}$$

> *Adjoint(A)*

$$\begin{bmatrix} a_{2,2} a_{3,3} - a_{2,3} a_{3,2} & a_{3,2} a_{1,3} - a_{1,2} a_{3,3} & a_{1,2} a_{2,3} - a_{2,2} a_{1,3} \\ -a_{2,1} a_{3,3} + a_{2,3} a_{3,1} & a_{1,1} a_{3,3} - a_{1,3} a_{3,1} & -a_{1,1} a_{2,3} + a_{1,3} a_{2,1} \\ a_{2,1} a_{3,2} - a_{2,2} a_{3,1} & -a_{1,1} a_{3,2} + a_{1,2} a_{3,1} & a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1} \end{bmatrix}$$

> *MatrixInverse(A) :*

> *simplify(A.MatrixInverse(A))*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az ellenőrzéssel valóban azt kaptuk, hogy a mátrix és inverzének szorzata egységmátrixot ad eredményül.

▼ 3.2.8. Tétel

Ha a lineáris egyenletrendszer szabályos, a megoldásvektora

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$$

alakú. □

A tételt a mérnöki gyakorlatban sokszor használják. az inverz mátrix meghatározása viszont hosszú számolással jár. Bebizonyítható, hogy ennek meghatározását helyettesíthetjük $n+1$ darab determináns meghatározásával.

▼ 3.2.9. Tétel

Ha egy lineáris egyenletrendszer szabályos, akkor:

- megoldható
- pontosan egy (n elemből álló) megoldása van
- a megoldás $x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}$ alakú, $i=1..n$

ahol $\det \mathbf{A}$ az egyenletrendszer együtthatóiból származtatott determináns, $\det \mathbf{A}_i$ pedig az i -edik módosított determináns, amely $\det \mathbf{A}$ -ból úgy jön létre, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix i -edik oszlopát az egyenletrendszer jobb oldalán álló konstansok oszlopával helyettesítjük.

A tétel harmadik állítását **Cramer-szabálynak** nevezzük.

Bizonyítás

A bizonyítást a szabályos 3×3 -as egyenletrendszer esetén végezzük el.

> $A := \text{Matrix}(3, 3, [[a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}], [a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}], [a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}]])$;

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

> $A1 := \text{Matrix}(3, 3, [[b_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}], [b_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}], [b_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}]])$;

$$A1 := \begin{bmatrix} b_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

> $A2 := \text{Matrix}(3, 3, [[a_{1,1}, b_{1,1}, a_{1,3}], [a_{2,1}, b_{2,1}, a_{2,3}], [a_{3,1}, b_{3,1}, a_{3,3}]])$

$$A2 := \begin{bmatrix} a_{1,1} & b_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_{3,1} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

> $A3 := \text{Matrix}(3, 3, [[a_{1,1}, a_{1,2}, b_{1,1}], [a_{2,1}, a_{2,2}, b_{2,1}], [a_{3,1}, a_{3,2}, b_{3,1}]])$

$$A3 := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_{1,1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_{2,1} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_{3,1} \end{bmatrix}$$

> $x1 := \frac{\text{Determinant}(A1)}{\text{Determinant}(A)} : x2 := \frac{\text{Determinant}(A2)}{\text{Determinant}(A)} : x3 := \frac{\text{Determinant}(A3)}{\text{Determinant}(A)} :$

> $\text{megoldas} := \text{Matrix}(3, 1, [x1, x2, x3])$

$\text{megoldas} :=$

$$\begin{aligned} & \left[\left((b_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} - b_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} + b_{2,1} a_{3,2} a_{1,3} - b_{2,1} a_{1,2} a_{3,3} + b_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - b_{3,1} a_{2,2} a_{1,3} \right) / (a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} + a_{2,1} a_{3,2} a_{1,3} - a_{2,1} a_{1,2} a_{3,3} \right. \\ & \quad \left. + a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} - a_{3,1} a_{2,2} a_{1,3}) \right], \\ & \left[(a_{1,1} b_{2,1} a_{3,3} - a_{1,1} a_{2,3} b_{3,1} + a_{2,1} b_{3,1} a_{1,3} - a_{2,1} b_{1,1} a_{3,3} + a_{3,1} b_{1,1} a_{2,3} \right. \\ & \quad \left. - a_{3,1} b_{2,1} a_{1,3}) / (a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} + a_{2,1} a_{3,2} a_{1,3} - a_{2,1} a_{1,2} a_{3,3} \right. \\ & \quad \left. + a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} - a_{3,1} a_{2,2} a_{1,3}) \right], \\ & \left[(a_{1,1} a_{2,2} b_{3,1} - a_{1,1} b_{2,1} a_{3,2} + a_{2,1} a_{3,2} b_{1,1} - a_{2,1} a_{1,2} b_{3,1} + a_{3,1} a_{1,2} b_{2,1} \right. \\ & \quad \left. - a_{3,1} a_{2,2} b_{1,1}) / (a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} + a_{2,1} a_{3,2} a_{1,3} - a_{2,1} a_{1,2} a_{3,3} \right. \\ & \quad \left. + a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} - a_{3,1} a_{2,2} a_{1,3}) \right] \end{aligned}$$

> $\text{ellenorzes} := \text{simplify}(A.\text{megoldas}) = B$

$$\text{ellenorzes} := \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ b_{3,1} \end{bmatrix} = B$$

2. Példa Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a 3.2.8. és a 3.2.9. tétel alkalmazásával is.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 - x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Megoldás

> $\text{rendszer} := x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, -x_1 - x_2 = 1, 2x_1 + x_3 = 1 :$

Az egyenletrendszerből generáljuk az együttható- és jobboldali konstansokból álló mátrixot!

> $A, B := \text{GenerateMatrix}([\text{rendszer}], [x_1, x_2, x_3])$

$$A, B := \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eredményül két mátrixot kapunk, az első az együtthatómátrix, a második a konstans vektor.

Vizsgáljuk meg, az egyenletrendszer szabályos-e, vagyis az együtthatómátrix determinánsa egyenlő-e 0-val.

> *detA := Determinant(A)*

detA := -5

Az egyenletrendszer szabályos, létezik az együtthatómátrix inverze. A megoldás az inverz mátrix segítségével:

> *megoldas := MatrixInverse(A).B*

$$\text{megoldas} := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ellenőrzés:

> *ellenorzes := simplify(A.megoldas) = B*

$$\text{ellenorzes} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Most képezzük az A1, A2, A3 mátrixokat, és a determinánsaikat.

> $A1 := \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{detA1} := \text{Determinant}(A1); A2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \text{detA2}$

$:= \text{Determinant}(A2); A3 := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{detA3} := \text{Determinant}(A3)$

detA1 := 0

detA2 := 5

detA3 := -5

Tehát az egyenletrendszer megoldása

> $x[1] := \frac{\text{detA1}}{\text{detA}}; x[2] := \frac{\text{detA2}}{\text{detA}}; x[3] := \frac{\text{detA3}}{\text{detA}};$

$x_1 := 0$

$x_2 := -1$

$x_3 := 1$

Ami megegyezik az előzőekben kapott megoldással.

▼ 3. 3. Lineáris egyenletrendszer megoldása Gauss-Jordan módszerrel

Használt Maple parancsok: [RowOperation](#), [BackwardSubstitute](#), [GaussianElimination](#), [ReducedRowEchelonForm](#)

▼ 3. 3. 1. A módszer lényege, lépésenkénti megoldás

A következő módszer nemcsak szabályos lineáris egyenletrendszer megoldására alkalmas. Az eljárás során a következő **elemi ekvivalens átalakításokat** végezzük el:

- E1. Valamelyik egyenletet egy 0-tól különböző számmal végigszorozzuk.
- E2. Valamelyik egyenlethez egy másik egyenlet számszorosát hozzáadjuk.
- E3. Két egyenletet felcserélünk.
- E4. Az olyan egyenleteket, amelyekben valamennyi együttható és a jobboldali állandó is 0 elhagyjuk.

Ezek az átalakítások az eredetivel egyenértékű egyenletrendszerhez vezetnek. Segítségükkel az egyenletrendszerből kiküszöböljük - egymás után - az ismeretleneket.

Az egyenletrendszert leírhatjuk mátrixok segítségével, hogy az együtthatómátrixot kibővítjük egy oszloppal, amely a jobb oldali konstansokat tartalmazza. Ezt az $m \times (n+1)$ -es mátrixot az egyenletrendszer **kibővített mátrixának** nevezzük.

Az egyenletekkel végzett E1-E4 elemi ekvivalens átalakításoknak a kibővített mátrixnál a sorokkal végzett hasonló változtatások felelnek meg:

- M1. Valamelyik sort egy nullától különböző számmal végigszorozzuk.
- M2. Valamelyik sorhoz egy másik sor számszorosát hozzáadjuk.
- M3. Két sort felcserélünk.
- M4. A csupa 0-ból álló sorokat elhagyjuk.

A kibővített mátrixon végzett fenti lépéseket **elemi sorekvivalens átalakításoknak** nevezzük.

Az átalakítások után egy olyan mátrixhoz jutunk, amelyben az első sort kivéve minden sor sor nullákkal kezdődik, az első valahány sorban az első nem 0 elem mindig 1-es (az ún. **vezéregyes**), ezek csupa különböző oszlopban, lépcsőzetesen lefelé és jobbra helyezkednek el, a vezéregyesek alatt pedig minden elem 0. Lehetnek ezen kívül olyan sorok is, amelyekben az együtthatómátrixnak megfelelő rész csupa 0. Az így létrejövő formát **lépcsős alaknak** nevezzük.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{1,2}^* & a_{1,3}^* & . & . & . & . & a_{1,n}^* & b_1^* \\ 0 & 1 & a_{2,3}^* & . & . & . & . & a_{2,n}^* & b_2^* \\ 0 & 0 & 1 & a_{3,4}^* & . & . & . & a_{3,n}^* & b_3^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{n,m}^* & b_n^* \end{bmatrix}$$

A lépcsős átalakításhoz az egyenletek sorrendjét úgy alakítjuk, hogy az azonos sor és oszlopindexű együtthatók ne legyenek 0 értékűek. (**Főelemkiválasztás** vagy **pivotálás**.)

A lépcsős alakból a vezéregyesek fölötti elemeket kinullázhatjuk, ha alulról felfelé haladva az egyes sorokból a vezéregyes sorának megfelelő többszörösét levonjuk. Az így adódó alakot **redukált lépcsős alaknak** nevezzük.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{1,2}^{**} & 0 & . & . & . & . & . & 0 & b_1^{**} \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & b_2^{**} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 & b_3^{**} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_n^{**} \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha a redukált lépcsős alakban nem fordul elő olyan sor, amelyben az együtthatóknak megfelelő rész csupa nulla, a jobb oldali rész pedig nem 0 (továbbiakban ezt **tilos sornak** hívjuk).

A **megoldás akkor és csak akkor egyértelmű**, ha nincs tilos sor és minden sorban áll vezéregyes, azaz a **vezéregyesek száma megegyezik az ismeretlenek számával**.

Ha az egyenletrendszer megoldása **nem egyértelmű**, akkor a **vezéregyest nem tartalmazó oszlopoknak megfelelő ismeretlenek tetszőlegesen választhatók** (azaz **szabad paraméterek**), a többi ismeretlen pedig ezekkel egyértelműen kifejezhető.

▼ 3.3.3. Megoldás a beépített Maple eljárással

A *Maple GaussianElimination* és *ReducedRowEchelonForm* (redukált lépcsős alak) utasításai egy lépésben végzik el a sorkvivalens átalakításokat.

3. Példa Oldjuk meg következő egyenletrendszereket a lépésenként a Gauss-Jordan módszerrel.

$$\begin{array}{lll} \text{i;} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 & \text{ii;} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \quad \text{iii;} \quad x_1 \\ & + x_2 + 2x_3 = 3 & \\ & 2x_1 - x_2 = 0 & x_1 - x_2 - 2x_3 = \\ -7 & 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6 & \\ & 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -3 & \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 & & 7x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 10 \end{array}$$

Megoldás

> *restart; with(LinearAlgebra) : rendszer1 := x[1] + 2x[2] + x[3] = 4, 2x[1] - x[2] = 0, 3x[1] - x[2] + 4x[3] = -3*

rendszer1 := x₁ + 2x₂ + x₃ = 4, 2x₁ - x₂ = 0, 3x₁ - x₂ + 4x₃ = -3

> *A1, b1 := GenerateMatrix([rendszer1], [x[1], x[2], x[3]]);*

M1 := GenerateMatrix([rendszer1], [x[1], x[2], x[3]], augmented = true)

$$A1, b1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$M1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

> *GaussianElimination*(M1);

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & \frac{19}{5} & -\frac{19}{5} \end{bmatrix}$$

> *ReducedRowEchelonForm*(M1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

> *x := BackwardSubstitute*(%)

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

> *A1x = b1*

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Az első egyenletrendszernek van egyértelmű megoldása.

> *restart : with*(LinearAlgebra) :

> *rendszer2 := 2 · x₁ + 3 x₂ + x₃ = 11, x₁ - x₂ - 2 x₃ = -7, 3 · x₁ + 2 x₂ - x₃ = 4 :*

> *A2, b2 := GenerateMatrix*([*rendszer2*], [*x₁*, *x₂*, *x₃*]) :

M2 := GenerateMatrix([*rendszer2*], [*x₁*, *x₂*, *x₃*], *augmented = true*) :

> *ReducedRowEchelonForm*(M2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> *x := BackwardSubstitute*(%)

$$x := \begin{bmatrix} -2 + _t_1 \\ 5 - _t_1 \\ -_t_1 \end{bmatrix}$$

A második egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, egy szabad paraméterrel.

> *restart : with*(LinearAlgebra) :

- > $rendszer3 := x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 = 3, 4 \cdot x_1 + 4 x_2 + 5 \cdot x_3 = 6, 7 \cdot x_1 + 7 x_2 + 8 \cdot x_3 = 10 :$
- > $A3, b3 := \text{GenerateMatrix}([rendszer3], [x_1, x_2, x_3]) :$
 $M3 := \text{GenerateMatrix}([rendszer3], [x_1, x_2, x_3], \text{augmented} = \text{true}) :$
- > $\text{ReducedRowEchelonForm}(M3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- > $x := \text{BackwardSubstitute}(\%)$
Error, (in LinearAlgebra:-BackwardSubstitute) inconsistent system

A harmadik egyenletrendszer nem oldható meg, egyenletei között ellentmondás van.

>

▼ 3.3.3. Inverz mátrix meghatározása Gauss eliminációval

Mátrixot az inverzével megszorozva, egységmátrixot kapunk. Ezt felhasználva, a mátrixhoz hozzávéve az egységmátrixot, majd a sorok összeadása és szorzása segítségével a mátrix bal oldalán kialakítva az egységmátrixot, jobboldalon az inverzmátrix áll elő.

4. Példa Adjuk meg a következő mátrix inverzét eliminációval.

- > $\text{restart, with}(\text{LinearAlgebra}) : M := \text{Matrix}(3, 3, [[1, 2, 1], [2, -1, 0], [3, -1, 4]])$

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás

Bővítsük ki a mátrixot az egységmátrixszal:

- > $MM := \text{Matrix}(3, 6, [[1, 2, 1, 1, 0, 0], [2, -1, 0, 0, 1, 0], [3, -1, 4, 0, 0, 1]])$

$$MM := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Végezzünk olyan sorátalakításokat, melyek segítségével az első 3 oszlop alakul át egységmátrixszá:

- > $MM1 := \text{RowOperation}(MM, [2, 1], -2)$

$$MM1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- > $MM2 := \text{RowOperation}(MM1, [3, 1], -3)$

$$MM2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$> MM3 := RowOperation\left(MM2, 2, -\frac{1}{5}\right)$$

$$MM3 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$> MM4 := RowOperation(MM3, [3, 2], 7)$$

$$MM4 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{19}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

$$> MM5 := RowOperation\left(MM4, 3, \frac{5}{19}\right)$$

$$MM5 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{19} & -\frac{7}{19} & \frac{5}{19} \end{bmatrix}$$

$$> MM6 := RowOperation\left(MM5, [2, 3], -\frac{2}{5}\right)$$

$$MM6 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{19} & -\frac{1}{19} & -\frac{2}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{19} & -\frac{7}{19} & \frac{5}{19} \end{bmatrix}$$

$$> MM7 := RowOperation(MM6, [1, 3], -1)$$

$$MM7 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{20}{19} & \frac{7}{19} & -\frac{5}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{19} & -\frac{1}{19} & -\frac{2}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{19} & -\frac{7}{19} & \frac{5}{19} \end{bmatrix}$$

$$> MM8 := RowOperation(MM7, [1, 2], -2)$$

$$MM8 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{19} & \frac{9}{19} & -\frac{1}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{19} & -\frac{1}{19} & -\frac{2}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{19} & -\frac{7}{19} & \frac{5}{19} \end{bmatrix}$$

> *MatrixInverse(M)*

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{9}{19} & -\frac{1}{19} \\ \frac{8}{19} & -\frac{1}{19} & -\frac{2}{19} \\ -\frac{1}{19} & -\frac{7}{19} & \frac{5}{19} \end{bmatrix}$$

Tehát a sorokvivalens átalakításokkal valóban az egységmátrixhoz jutottunk.

▼ 3. 4. Lineáris egyenletrendszer megoldása bázistranszformációval

Tekintsük az egyenletrendszer $\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \dots + \mathbf{a}_kx_k + \dots + \mathbf{a}_nx_n = \mathbf{b}$ vektoregyenletes alakját, ahol $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ az m dimenziós tér vektorai.

A megoldás során meg kell állapítanunk, hogy a $\mathbf{b}$ felírható-e az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n$ együtthatóvektorok lineáris kombinációjaként, illetve ha felírható, akkor hogyan.

Ha $\mathbf{b}$ felírható az együtthatóvektorok lineáris kombinációjaként, vagyis $\mathbf{b}$ benne van az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok által generált térben., akkor az egyenletrendszer megoldható.

▼ 3. 4. 1. Bázistranszformáció

A lineáris térből végtelen sok bázis választható ki. Ha a tér egy bázisáról egy másikra térünk át, akkor a tér vektorainak koordinátái - az új vektorrendszerre vonatkozó jellemzői - megváltoznak. **Bázistranszformációnak** nevezzük azt az eljárást, amellyel egy vektornak adott bázisra vonatkozó koordinátáiból meghatározzuk egy másik bázisra vonatkozó koordinátáit. A bázistranszformációt lépésenként, ún. **elemi bázistranszformációk** egymás utáni alkalmazásával hajtjuk végre.

Hogyan hajtható végre az elemi bázistranszformáció, azaz hogyan számítjuk ki egy vektor adott bázisra vonatkozó koordinátáinak ismeretében ennek a vektornak egy olyan új bázisra vonatkozó koordinátáit, amely az eredeti bázistól csak egy vektorban különbözik?

Legyen az n -dimenziós tér (L_n) egy bázisa $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k, \dots, \mathbf{b}_n$, és $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ az L_n egy vektora, amelyet bevonunk a bázisba (ezt választjuk bázisvektornak valamelyik régi bázisvektor helyett). Tekintsük a tér egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorát, amelynek koordinátái $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n$. Az $\mathbf{x}$ vektornak az új bázisra vonatkozó koordinátáit fogjuk meghatározni.

Mivel $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, ezért $\mathbf{c}$ -nek legalább az egyik bázisvektorra vonatkozó koordinátája nem 0. Legyen ez a $\mathbf{b}_k$ vektorra vonatkozó koordináta. A $\mathbf{c}$ egyértelműen felírható a bázisvektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\mathbf{c} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \dots + c_k\mathbf{b}_k + \dots + c_n\mathbf{b}_n$, ahol $c_k \neq 0$.

Kicserélhető-e a $\mathbf{b}_k$ eredeti bázisvektor a $\mathbf{c}$ vektorral? Ez a bázisvektorcsere akkor végezhető el, ha $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{k-1}, \mathbf{c}, \mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_n$ vektorok az L_n tér egy másik bázisát alkotják, azaz

ez az n db vektor lineárisan független vektorrendszert alkot.

Határozzuk meg az $\mathbf{x}$ vektornak az új bázisra vonatkozó koordinátáit! Az $\mathbf{x}$ vektor az eredeti bázis segítségével felírva $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + \dots + x_k \mathbf{b}_k + \dots + x_n \mathbf{b}_n$

A $\mathbf{b}_k$ helyett $\mathbf{c}$ lesz az új bázisvektor (a többi marad). Az új bázissal $\mathbf{x} = x_1' \mathbf{b}_1 + x_2' \mathbf{b}_2 + \dots + x_k' \mathbf{c} + \dots + x_n' \mathbf{b}_n$ ahol

A $\mathbf{b}_k$ vektor a $\mathbf{c}$ vektorral kifejezve, majd ezt az $\mathbf{x}$ vektor eredeti előállításába behelyettesítve:

$$\mathbf{b}_k = -\frac{1}{c_k} (c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \dots + c_{k-1} \mathbf{b}_{k-1} - \mathbf{c} + c_{k+1} \mathbf{b}_{k+1} + \dots + c_n \mathbf{b}_n) \quad (c_k \neq 0).$$

Így:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + \dots - \frac{x_k}{c_k} (c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \dots - \mathbf{c} + c_{k+1} \mathbf{b}_{k+1} + \dots + c_n \mathbf{b}_n) + \dots + x_n \mathbf{b}_n$$

Az $\mathbf{x}$ vektornak az új $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{c}, \dots, \mathbf{b}_n$ bázisra vonatkozó koordinátáit leolvashatjuk, ha a vektorokra vonatkozó műveleti tulajdonságokat alkalmazzuk.

$$\mathbf{x} = (x_1 - \frac{x_k}{c_k} c_1) \mathbf{b}_1 + (x_2 - \frac{x_k}{c_k} c_2) \mathbf{b}_2 + \dots + \frac{x_k}{c_k} \mathbf{c} + \dots + (x_n - \frac{x_k}{c_k} c_n) \mathbf{b}_n$$

Tehát ha a lineáris tér k -adik bázisvektora helyett új bázisvektort választunk (csak olyan vektort választhatunk, amelynek a k -adik bázisvektorra vonatkozó koordinátája nem 0), akkor a tér tetszőleges vektorának ($\mathbf{x}$) az új bázisra vonatkozó koordinátáit a következőképpen számíthatjuk ki:

1. Az $\mathbf{x}$ vektornak az új (k -adik) bázisvektorra vonatkozó koordinátáját (x_k') megkapjuk, ha az $\mathbf{x}$ régi (k -adik) bázisvektorra vonatkozó koordinátáját elosztjuk az új (k -adik, $\mathbf{c}$) bázisvektor régi (k -adik) bázisvektorra vonatkozó koordinátájával ($c_k \neq 0$)

$$x_k' = \frac{x_k}{c_k} = \delta, \text{ ahol a } c_k \neq 0 \text{-t generáló elemnek nevezzük.}$$

2. Az $\mathbf{x}$ vektornak az új bázisra vonatkozó többi koordinátáját úgy kapjuk meg, hogy az $\mathbf{x}$ régi bázisvektorra vonatkozó koordinátájából rendre kivonjuk az új bázisvektor ($\mathbf{c}$) régi bázisra

vonatkozó megfelelő koordinátáinak $\frac{x_k}{c_k} = \delta$ -szorosát:

$$x_i' = x_i - \delta c_i \quad (i \neq k)$$

Ha több vektort akarunk bevinni a bázisba ill. ha egy bázisról egy olyan bázisra akarunk áttérni, amely az eredetitől nem csak egy vektorban különbözik, akkor egymás után több elemi bázistranszformációt végzünk.

▼ 3. 4. 2. Bázistranszformáció Maple-ben

Algoritmus	Maple eljárás
elemi (mgen, ngen::pozitív egész, V:: mátrix) genel := $V_{mgen, ngen}$ ismételd j-re 1-től oszlopméretig kezdet delta := $\frac{V_{mgen, j}}{genel}$ ha $j \neq ngen$ akkor	<pre> > restart; with(LinearAlgebra) : > elemi := proc(mgen, ngen::posint, V::Matrix) local i, j, genel, delta; genel := V[mgen, ngen]; for j to ColumnDimension(V) do delta := V[mgen, j]/genel; if j <> ngen then for i to RowDimension(V) do if i <> mgen then V[i, j] := V[i, j] - delta * V[i, ngen] end if; end for; end if; end for; end proc; </pre>

kezdet ismételd i-re 1-től sorméretig kezdet ha $i \neq ngen$ akkor $V_{i,j} = V_{i,j} - \delta V_{i,ngen}$ egyébként $V_{i,j} = \delta$ vége vége ismételd i-re 1-től sorméretig ha $i \neq mgen$ akkor $V_{i,ngen} = 0$ egyébként $V_{i,j} = 1$ eljárás vége	end if; if $i = mgen$ then $V[i,j] := \text{delta}$ end if end do end if end do; for i to $\text{RowDimension}(V)$ do if $i \neq mgen$ then $V[i,ngen] := 0$ else $V[i,ngen] := 1$ end if end do; V end proc : >
--	--

5. példa A következő egyenletrendszer tartalmaz egy c paramétert. Adjuk meg a c értékét úgy, hogy

- i; az egyenletrendszernek legyen egyértelmű megoldása
- ii; ne legyen megoldása
- iii; végtelen sok megoldása legyen.

Megoldás

> $e1 := x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 : e2 := 2x_1 + 5x_3 = 8 : e3 := x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 : e4 := x_1 - x_2 + x_4 = c : rendszer := e1, e2, e3, e4 :$

> $M := \text{GenerateMatrix}([rendszer], [x_1, x_2, x_3, x_4], \text{augmented} = \text{true})$

$$M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

> $\text{elemi}(1, 1, M)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & c-1 \end{bmatrix}$$

> $\text{elemi}(3, 2, M)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & c-1 \end{bmatrix}$$

> $\text{elemi}(2, 3, M)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-3 \end{bmatrix}$$

- i; Megfigyelhető, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ együtthatóvektorok nem lineárisan függetlenek (az $\mathbf{a}_4$ az $\mathbf{a}_2$ -1-szerese), így az egyenletrendszernek egyetlen c -re sincs egyértelmű megoldása.
 ii; Ha $c \neq 3$, az egyenletrendszer nem oldható meg, mert a konstansokból álló vektor nincs benne az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ vektorok által generált térben.
 iii; Ha $c=3$, az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, egy szabad paraméterrel,
 $x_1=9, x_3=-2, x_2=6+x_4$

Ellenőrizzük a megoldást a Gauss-Jordan eliminációval.

- > *rendszeruj* := e1, e2, e3, subs(c=3, e4)
rendszeruj := $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, 2x_1 + 5x_3 = 8, x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, x_1 - x_2 + x_4 = 3$
 > *megoldas*
 := BackwardSubstitute(ReducedRowEchelonForm(GenerateMatrix([*rendszeruj*],
 $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, augmented=true)))

$$\text{megoldas} := \begin{bmatrix} 9 \\ 6 + t_1 \\ -2 \\ t_1 \end{bmatrix}$$

6. példa A következő egyenletrendszer két szabad paramétert, a -t és b -t is tartalmaz.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 9x_2 - 5x_3 &= b \end{aligned}$$

Adjuk meg a és b értékét úgy, hogy i; az egyenletrendszernek legyen egyértelmű megoldása

ii; ne legyen megoldása

iii; végtelen sok megoldása legyen.

Megoldás

- > $e1 := 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 1 : e2 := x_1 + ax_2 + 2x_3 = 2 : e3 := x_1 + 9x_2 - 5x_3 = b :$
rendszer := e1, e2, e3 :
 > $M := \text{GenerateMatrix}([\text{rendszer}], [x_1, x_2, x_3], \text{augmented} = \text{true})$

$$M := \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2 \\ 1 & 9 & -5 & b \end{bmatrix}$$

- > *elemi*(2, 1, M)

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 - 3a & -7 & -5 \\ 1 & a & 2 & 2 \\ 0 & 9 - a & -7 & b - 2 \end{bmatrix}$$

> *elemi*(1, 3, *M*)

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{7} + \frac{3}{7}a & 1 & \frac{5}{7} \\ 1 & \frac{1}{7}a + \frac{10}{7} & 0 & \frac{4}{7} \\ 0 & 4 + 2a & 0 & b + 3 \end{bmatrix}$$

> *eredmeny* := *elemi*(3, 2, *M*)

$$\text{eredmeny} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} - \frac{(b+3)\left(-\frac{5}{7} + \frac{3}{7}a\right)}{4+2a} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{4}{7} - \frac{(b+3)\left(\frac{1}{7}a + \frac{10}{7}\right)}{4+2a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b+3}{4+2a} \end{bmatrix}$$

Az eljárás nem kezeli az $a = -2$ esetet, hiszen a $4 + 2a$ -val való osztást elvégzi.

Megoldás i; Ha $a \neq -2$, az egyenletrendszernek **tetszőleges b -re egyértelmű** megoldása van.

> *megoldas*

:= *BackwardSubstitute*(*ReducedRowEchelonForm*(*GenerateMatrix*([*rendszer*],
[x_1, x_2, x_3], *augmented* = true)))

$$\text{megoldas} := \begin{bmatrix} -\frac{1}{14} & \frac{-5a + 14 + ba + 10b}{a+2} \\ \frac{1}{2} & \frac{b+3}{a+2} \\ -\frac{1}{14} & \frac{3ba - 5b - a - 35}{a+2} \end{bmatrix}$$

Ellenőrizzük hogy ez a *megoldas* megegyezik-e a bázistranszformációval kapott *eredmeny*-nyel.
a megfelelő sorrendre ügyelnünk kell!

> *simplify*(*eredmeny*[1, 4] - *megoldas*[3]); *simplify*(*eredmeny*[2, 4] - *megoldas*[1]);
simplify(*eredmeny*[3, 4] - *megoldas*[2])

0
0
0

Vizsgáljuk meg az $a = -2$ esetét!

> *rendszeruj* := *e1*, *subs*($a = -2$, *e2*), *e3*

$$\text{rendszeruj} := 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 1, x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2, x_1 + 9x_2 - 5x_3 = b$$

> $Muj := \text{GenerateMatrix}([rendszeruj], [x_1, x_2, x_3], \text{augmented} = \text{true})$

$$Muj := \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 9 & -5 & b \end{bmatrix}$$

> $\text{elemi}(2, 1, Muj)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 11 & -7 & -5 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 11 & -7 & b-2 \end{bmatrix}$$

> $\text{elemi}(1, 2, Muj)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{7}{11} & -\frac{5}{11} \\ 1 & 0 & \frac{8}{11} & \frac{12}{11} \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \end{bmatrix}$$

Megoldás ii; Ha $a = -2$ és $b \neq -3$ az egyenletrendszernek **nincs megoldása**.

Megoldás iii; Ha $a = -2$ és $b = -3$

> $\text{rendszeruj2} := eI, \text{subs}(a = -2, e2), \text{subs}(b = -3, e3)$

$$\text{rendszeruj2} := 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 1, x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2, x_1 + 9x_2 - 5x_3 = -3$$

> $Muj2 := \text{GenerateMatrix}([rendszeruj2], [x_1, x_2, x_3], \text{augmented} = \text{true})$

$$Muj2 := \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 9 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

> $\text{elemi}(3, 1, Muj2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -22 & 14 & 10 \\ 0 & -11 & 7 & 5 \\ 1 & 9 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

> $\text{elemi}(2, 3, Muj2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{7} & 1 & \frac{5}{7} \\ 1 & \frac{8}{7} & 0 & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

Tehát ha $a = -2$ és $b = -3$ Az egyenletrendszernek **végtelen sok megoldása** van, egy szabad paraméterrel (most például x_2).

> $\text{solve}([rendszeruj2], \{x_1, x_2, x_3\})$

$$\left\{ x_1 = \frac{4}{7} - \frac{8}{7} x_2, x_2 = x_2, x_3 = \frac{5}{7} + \frac{11}{7} x_2 \right\}$$

▼ 3. 5. További Maple eljárások direkt megoldásokhoz

Ebben a részben további megoldási módszereket ismertetünk szabályos lineáris rendszerek megoldására, az elméleti háttér részletes ismertetése nélkül.

Használt Maple parancsok: [LUDecomposition](#) , [ForwardSubstitute](#), [BackvardSubstitute](#), [LinearSolve](#), [QRDecomposition](#), [Transpose](#)

▼ 3. 5. 1. LU módszer

Az **A** mátrix **LU**-felbontása azt jelenti, hogy keressük azt az **L** és **U** mátrixokat, melyekre teljesül, hogy **A** = **LU**. Ebben a felbontásban az **L** egy $n \times n$ -es alsó háromszögmátrix, mégpedig úgy, hogy a főátlóban rendre 1-es elemek helyezkednek el, **U** pedig egy $n \times n$ -es felső háromszögmátrix.

> restart; with(LinearAlgebra) : $A := \text{Matrix}(3, 3, [[a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}], [a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}], [a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}]])$

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

> $P, L, U := \text{LUDecomposition}(A)$

$$P, L, U := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} & \frac{a_{3,2}a_{1,1} - a_{3,1}a_{1,2}}{a_{2,2}a_{1,1} - a_{2,1}a_{1,2}} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0, \frac{a_{2,2}a_{1,1} - a_{2,1}a_{1,2}}{a_{1,1}}, \frac{a_{2,3}a_{1,1} - a_{2,1}a_{1,3}}{a_{1,1}} \\ 0, 0, \frac{1}{a_{2,2}a_{1,1} - a_{2,1}a_{1,2}} (a_{3,3}a_{1,1}a_{2,2} - a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2} - a_{3,1}a_{1,3}a_{2,2} - a_{3,2}a_{1,1}a_{2,3} + a_{3,2}a_{2,1}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}) \end{bmatrix}$$

Az eredményben **P** az un. permutáló mátrix (az egyenletrendszer sorait felcserélő mátrix) **L** és **U** az előbb említett alsó és felső háromszögmátrix. Figyeljük meg, hogy a mátrixok képzése a Gauss eliminációnál látottakhoz hasonló. Szorzatuk visszadja az **A** mátrixot.

> $\text{simplify}(L.U) = A$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Ha P az egységmátrix az $Ax=b$ egyenletrendszer $Ux=y$, $Ly=b$ alakúvá válik. Nézzük meg a megoldást lépésenként, egy konkrét példán keresztül:

7. Példa Oldjuk meg a $3x_1 + 4x_3 = -1$,
 $7x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 17$,
 $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$
 egyenletrendszert LU felbontással.

Megoldás

> $rendszer := [3x_1 + 4x_3 = -1, 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 17, -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0]$:

> $A, b := \text{GenerateMatrix}(\text{rendszer}, [x_1, x_2, x_3])$

$$A, b := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 17 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> $P, L, U := \text{LUDecomposition}(A)$

$$P, L, U := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -\frac{22}{3} \\ 0 & 0 & \frac{31}{6} \end{bmatrix}$$

Az $Ly=b$ egyenletrendszer megoldása y -ra egyszerű, mert L alsó háromszögmátrix. A *ForwardSubstitute* utasítás helyettesítheti ebben az esetben L inverzének meghatározását.

> $y := \text{ForwardSubstitute}(L, b)$

$$y := \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{58}{3} \\ -\frac{31}{6} \end{bmatrix}$$

> $y := \text{MatrixInverse}(L).b$

$$y := \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{58}{3} \\ -\frac{31}{6} \end{bmatrix}$$

Ezután az $Ux=y$ rendszer is könnyen kezelhető, mert U felsőháromszögmátrix. Utasítás: *BackwardSubstitute*

> $x := \text{BackwardSubstitute}(U, y)$

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A *LinearSolve* utasítás a fentieket egy lépésben megteszi:

> $x := \text{LinearSolve}(A, b, \text{method} = 'LU');$

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

▼ 3. 5. 2. QR módszer

Az $A=QR$ felbontásban most Q ortogonális mátrix (a transzponáltja egyben az inverze is, tehát inverzmátrix helyet elegendő a transzponálttal számolni), R pedig egy felső háromszögmátrix.

8. Példa A 8. példa együtthatómátrixát bontsuk fel Q és R mátrixok szorzatára.

Megoldás

> $Q, R := \text{QRDecomposition}(A)$

$$Q, R := \begin{bmatrix} \frac{3}{59} \sqrt{59} & -\frac{81}{16166} \sqrt{16166} & \frac{11}{274} \sqrt{274} \\ \frac{7}{59} \sqrt{59} & \frac{47}{16166} \sqrt{16166} & -\frac{3}{274} \sqrt{274} \\ -\frac{1}{59} \sqrt{59} & \frac{43}{8083} \sqrt{16166} & \frac{6}{137} \sqrt{274} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{59} & \frac{27}{59} \sqrt{59} & \frac{24}{59} \sqrt{59} \\ 0 & \frac{1}{59} \sqrt{16166} & -\frac{29}{8083} \sqrt{16166} \\ 0 & 0 & \frac{31}{137} \sqrt{274} \end{bmatrix}$$

> $Q.R = A$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

> $\text{Transpose}(Q).Q$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Így a $QRx=b$ egyenletrendszer két lépésben oldható meg.

> $Rx := \text{Transpose}(Q).b$

$$Rx := \begin{bmatrix} \frac{116}{59} \sqrt{59} \\ \frac{440}{8083} \sqrt{16166} \\ -\frac{31}{137} \sqrt{274} \end{bmatrix}$$

> $x := \text{BackwardSubstitute}(R, Rx)$

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Egy lépésben is megoldható mindez

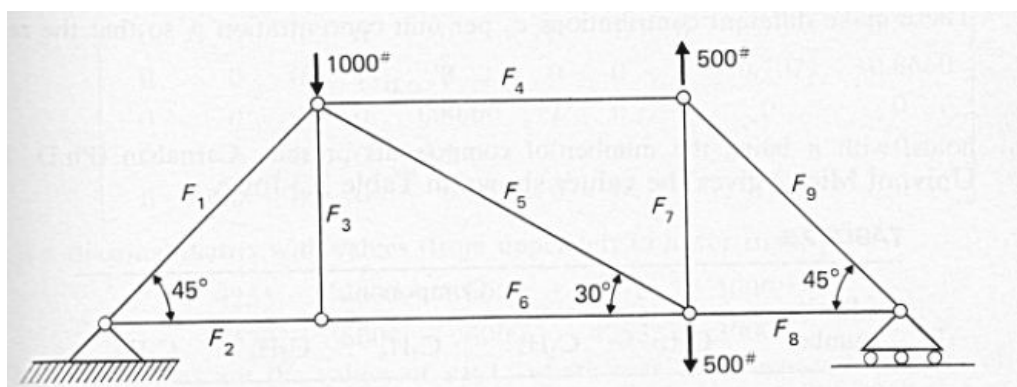
> $x := \text{LinearSolve}(A, b, \text{method} = 'QR')$

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A LinearSolve parancs opciói az LU és a QR mellett lehetnek még 'solve', 'subs', 'Cholesky', 'hybrid', 'modular', 'SparseLU', 'SparseDirect', 'SparsesIterative' is ezek tárgyalása azonban meghaladja jelen jegyzet kereteit.

▼ 3. 6. Gyakorlati alkalmazás

9. példa Statikai probléma: Határozzuk meg az alábbi ábrán szereplő egyensúlyi rendszer esetén az egyes rudakra ható erőket Gauss- Jordan eliminációval.



Megoldás

Az egyenletrendszer felírásakor használjuk fel, hogy az erők vízszintes és függőleges irányú összetevőinek eredője is 0.

> restart

> $e1 := \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) F_1 - F_4 = 0 :$
 > $e2 := \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) F_1 + F_3 + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) F_5 = -1000 :$
 > $e3 := F_2 - F_6 = 0 :$
 > $e4 := -F_3 = 0 :$
 > $e5 := F_7 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) F_9 = 500 :$
 > $e6 := F_4 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) F_9 = 0 :$
 > $e7 := \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) F_5 + F_6 - F_8 = 0 :$
 > $e8 := -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) F_5 - F_7 = -500 :$
 > $e9 := F_8 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) F_9 = 0 :$
 > $rendszer := e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9 :$

Írjuk fel a bővített mátrixot, oldjuk meg a rendszert, és ellenőrizzük az eredményt.

> *with(LinearAlgebra) :*
 $A, b := \text{GenerateMatrix}([rendszer], [F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9]) : M :=$
 $\text{GenerateMatrix}([rendszer], [F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9], augmented = true) :$
 > $RLA := \text{ReducedRowEchelonForm}(M)$

$$RLA := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -500\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500\sqrt{3} + 500 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500\sqrt{3} + 500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -500\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

> $F := \text{BackwardSubstitute}(RLA)$

$$F := \begin{bmatrix} -500\sqrt{2} \\ 500\sqrt{3} + 500 \\ 0 \\ -500 \\ -1000 \\ 500\sqrt{3} + 500 \\ 1000 \\ 500 \\ -500\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

> $A.F = b$

$$A. \begin{bmatrix} -500\sqrt{2} \\ 500\sqrt{3} + 500 \\ 0 \\ -500 \\ -1000 \\ 500\sqrt{3} + 500 \\ 1000 \\ 500 \\ -500\sqrt{2} \end{bmatrix} = b$$

10 . példa Hőtani probléma Fal belső hőmérsékletének meghatározása a véges differenciák módszerével.

Tekintsünk egy sarokelemet, melynek külső oldala 0,8 m, falvastagsága 3 m.

T28	T29	T30	T31	T32	T33	T34	T35	T36	T37	T38	Tb
T29	T18	T19	T20	T21	T22	T23	T24	T25	T27	T28	T1
T30	T19	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16	T17	TII
T31	T20	T10	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	Tbf
T32	T21	T11	T2								
T33	T22	T12	T3								
T34	T23	T13	T4								
T35	T24	T14	T5								
T36	T25	T15	T6								
T37	T26	T16	T7								
T38	T27	T17	T8								
Tkf	T1	TII	Tbf								

Adottak a külső és belső hőmérsékletek, a hőátadási tényezők, a hővezetési tényező. Adjuk meg a hőmérséklet eloszlást az ábrán látható 9 pontban a különböző, ismertett módszerekkel, ha az egyenletrendszer

$$-4 T_1 + T_2 + T_4 = -50,$$

$$T_1 - 4 T_2 + T_3 + T_5 = -50,$$

$$T_2 - 4 T_3 + T_6 = -150,$$

$$T_1 - 4 T_4 + T_5 + T_7 = 0,$$

$$T_2 + T_4 - 4 T_5 + T_6 + T_8 = 0,$$

$$T_3 + T_5 - 4 T_6 + T_9 = -100,$$

$$T_4 - 4 T_7 + T_8 = -50,$$

$$T_5 + T_7 - 4 T_8 + T_9 = -50,$$

$$T_6 + T_8 - 4 T_9 = -150$$

alakú (OTKA kutatás 2006)

Megoldás

- > $rendszer := -4 T_1 + T_2 + T_4 = -50, T_1 - 4 T_2 + T_3 + T_5 = -50, T_2 - 4 T_3 + T_6 = -150, T_1 - 4 T_4 + T_5 + T_7 = 0, T_2 + T_4 - 4 T_5 + T_6 + T_8 = 0, T_3 + T_5 - 4 T_6 + T_9 = -100, T_4 - 4 T_7 + T_8 = -50, T_5 + T_7 - 4 T_8 + T_9 = -50, T_6 + T_8 - 4 T_9 = -150 :$
- > $A, b := GenerateMatrix([rendszer], [T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9]) :$
- > $M := GenerateMatrix([rendszer], [T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9], augmented = true) :$

Gauss-Jordan eliminációval:

> $RLA := \text{ReducedRowEchelonForm}(M) : T := \text{evalf}(\text{BackwardSubstitute}(RLA))$

$$T := \begin{bmatrix} 32.14285714 \\ 50. \\ 67.85714286 \\ 28.57142857 \\ 50. \\ 71.42857143 \\ 32.14285714 \\ 50. \\ 67.85714286 \end{bmatrix}$$

LU módszerrel:

> $T := \text{evalf}(\text{LinearSolve}(A, b, \text{method} = 'LU'))$

$$T := \begin{bmatrix} 32.14285714 \\ 50. \\ 67.85714286 \\ 28.57142857 \\ 50. \\ 71.42857143 \\ 32.14285714 \\ 50. \\ 67.85714286 \end{bmatrix}$$

QR módszerrel:

> $T := \text{evalf}(\text{LinearSolve}(A, b, \text{method} = 'QR'))$

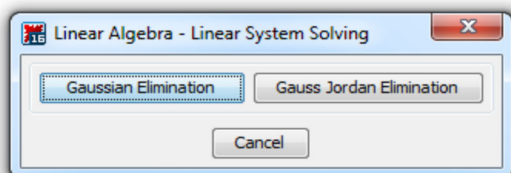
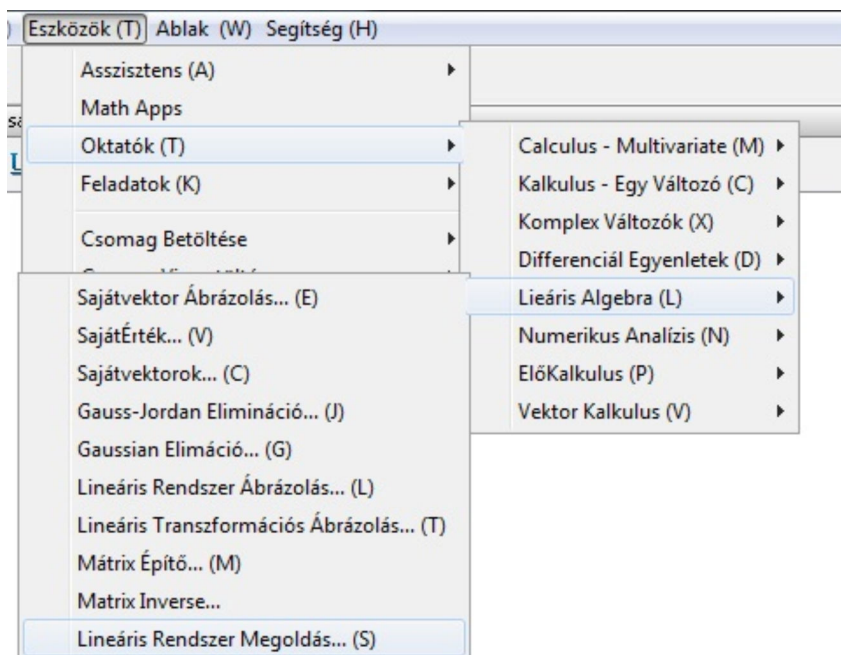
$$T := \begin{bmatrix} 32.14285714 \\ 50. \\ 67.85714286 \\ 28.57142857 \\ 50. \\ 71.42857143 \\ 32.14285714 \\ 50. \\ 67.85714286 \end{bmatrix}$$

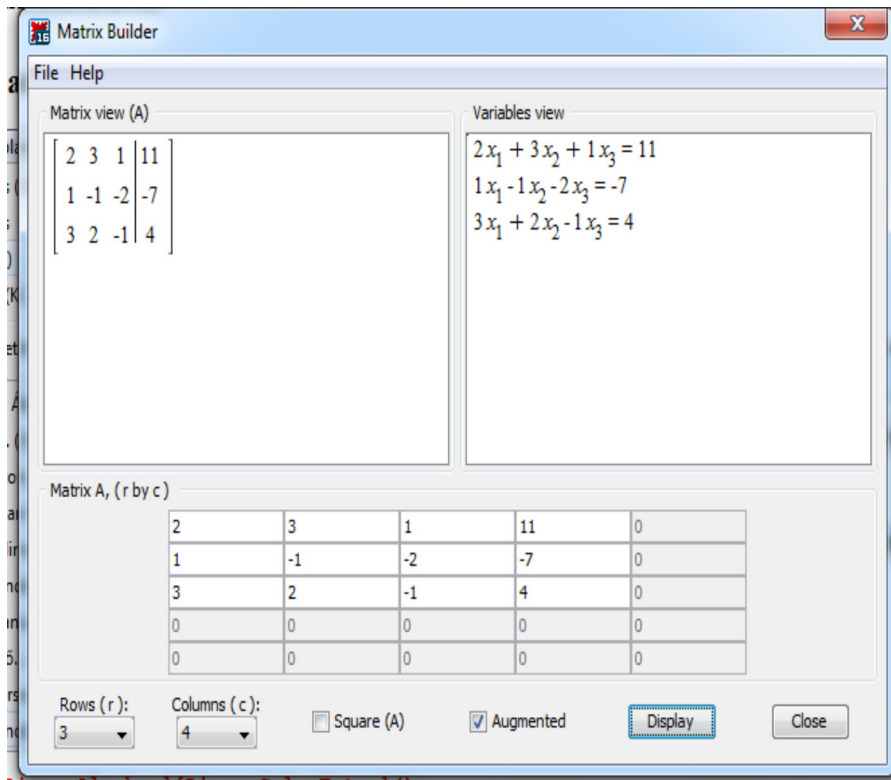
ahogyan azt vártuk, különböző módszerekkel kapott eredmények megegyeznek.

▼ 3. 7. Maple Oktató (Tutorial)

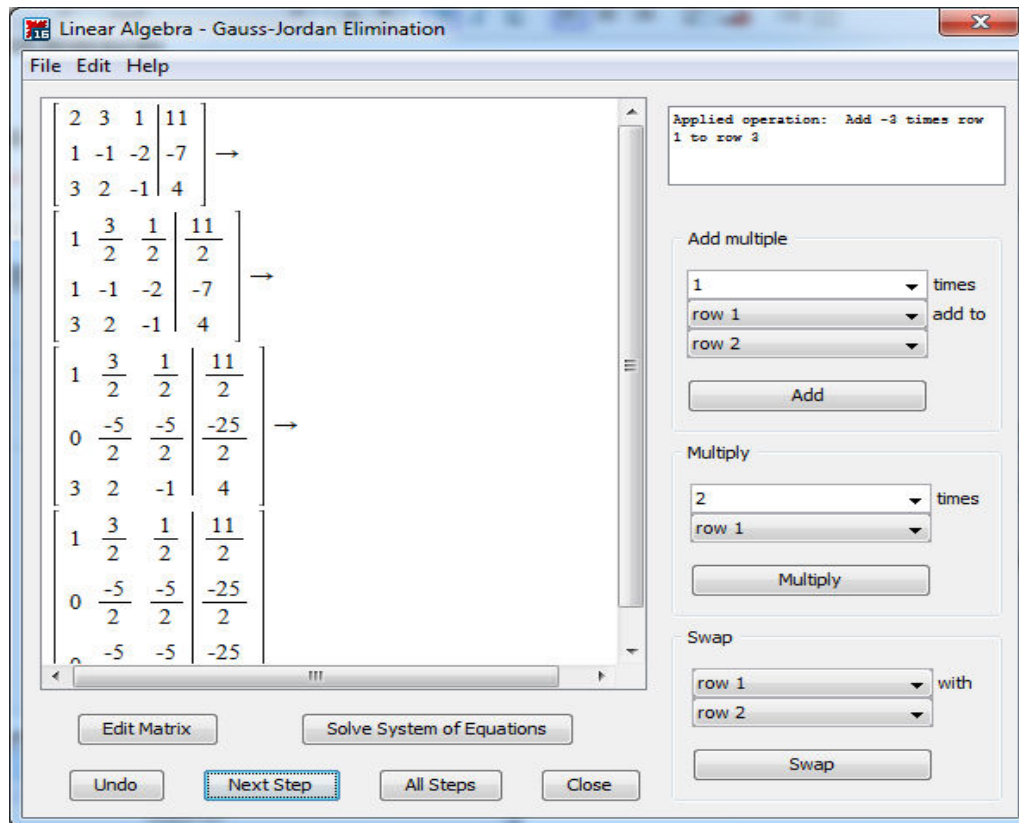
> *Student[LinearAlgebra]*_{LinearSolveTutor}()

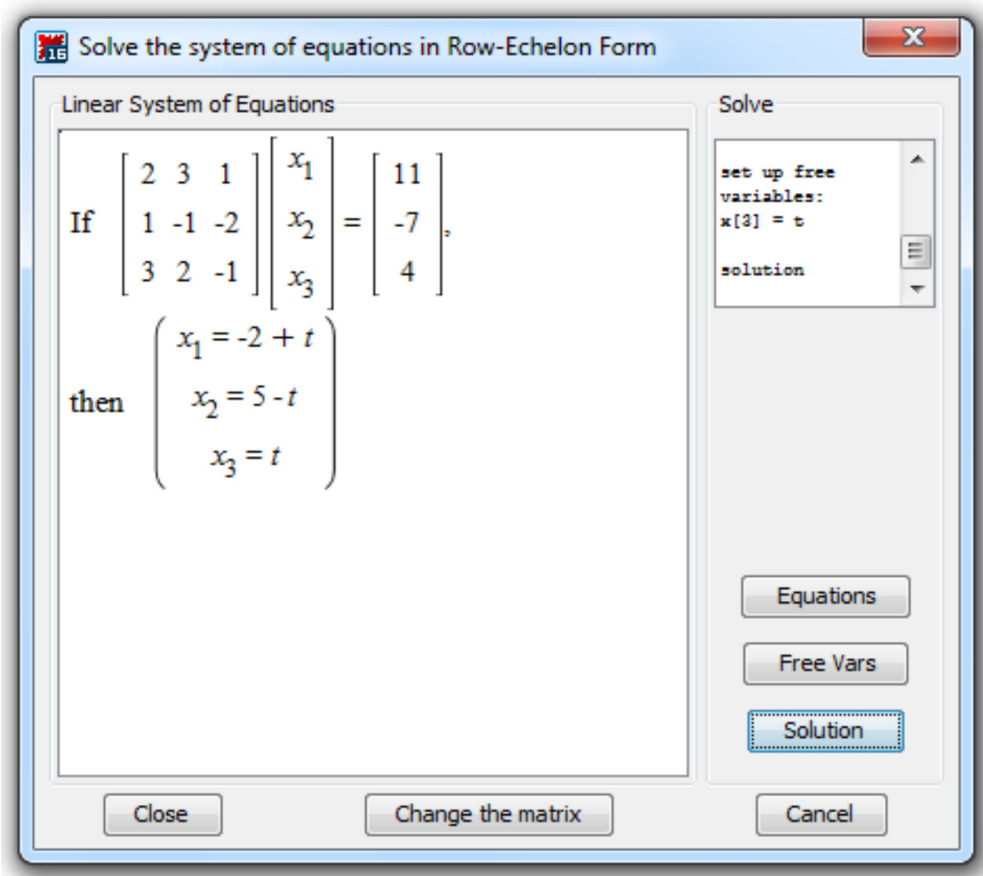
Az Eszközök menüsorban, Oktatók menüpont, Lineáris Algebra, Lineáris Rendszer Megoldás kiválasztásával egyszerűen megoldhatunk lineáris egyenletrendszereket, illetve lépésenként megtanulhatjuk, hogyan kell a Gauss illetve a Gauss-Jordan eliminációt végrehajtani.





Kiválasztjuk a megoldás módszerét, majd a Mátrix Builder segítségével definiálhatjuk az egyenletrendszert. Ezután definiálhatjuk a sorokkal történő műveleteket, illetve a Next step gombra kattintva lépésenként követhetjük a megoldást. a Solve system of equations gomb megnyomásával megkapjuk az egyenletrendszer megoldását.





▼ 3. 8. Feladatok

1. Feladat Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket Cramer szabállyal (ha lehet), Gauss-Jordan eliminációval és bázistranszformációval is.

1. a.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3 \cdot x_4 &= 4, \\ 2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ x_3 &= -1, \\ 3 \cdot x_1 - x_2 - x_3 + 2 \cdot x_4 &= -3, \\ -7, \\ -x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - x_4 &= 4, \\ 3 \cdot x_1 - 7 \cdot x_2 + x_3 - 5 \cdot x_4 &= -8, \end{aligned}$$

1. b.

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 - x_4 &= -1, \\ x_1 - 4 \cdot x_2 + 2 \\ 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - x_3 - 5 \cdot x_4 &= \end{aligned}$$

1. c.

$$\begin{aligned} x_1 - 8 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 &= -32, \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + 3 \cdot x_3 &= -1, \\ x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 &= 12, \end{aligned}$$

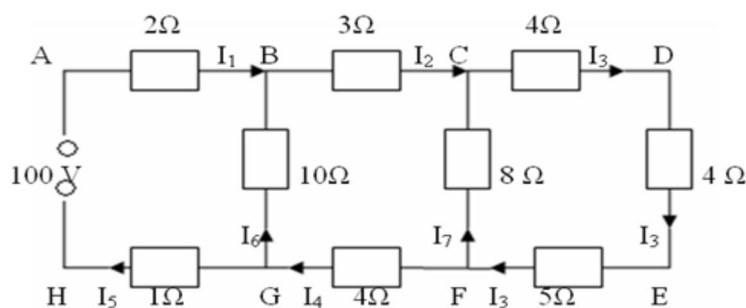
1.d.

$$\begin{aligned} x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &= 1, \\ &= 4, \\ x_1 + 3 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 &= 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 8, \\ 3 \cdot x_1 - x_2 - 4 \cdot x_3 &= 1, \\ 9 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 &= 1, \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 &= 1, \end{aligned}$$

1. e. $x_1 + x_2 + x_3 - x_4$

$3 \cdot x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3 - x_4 = 16,$

2. Feladat Tekintsük a következő áramkört, határozzuk meg az egyes ellenállásokon átfolyó áramok erősségét.



▼ 3. 9. Ellenőrző kérdések

1. Írjon példát egy 3x4-es lineáris egyenletrendszerre!
2. Mikor oldható meg egy lineáris egyenletrendszer?
3. Milyen feltételek mellett alkalmazható a Cramer szabály? Hogyan oldható meg az egyenletrendszer Cramer szabállyal?
4. A Gauss elimináció lépései. Mi a feltétele annak, hogy az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása legyen?
5. Mi a bázistranszformáció lényege?
6. Mondjon további mérnöki alkalmazásokat, ahol lineáris egyenletrendszert kell megoldania.